Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 54

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

7 de marzo de 2021

1. Calcular B^2 y B^3.

Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_3^2 - n_2^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & -n_3^2 - n_1^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & -n_2^2 - n_1^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & 1 - n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & 1 - n_3^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Y la matriz B^3 será

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 1 - n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & 1 - n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & 1 - n_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -(1-n_1^2)n_3 + n_1^2 n_3 & (1-n_1^2)n_2 - n_1^2 n_2 \\ (1-n_2^2)n_3 - n_2^2 n_3 & 0 & n_1 n_2^2 - n_1(1-n_2^2) \\ n_2 n_3^2 - n_2(1-n_3^2) & -n_1 n_3^2 + n_1(1-n_3^2) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= B \end{aligned}$$

2. Comprobad que $[B_i, B_j] = \varepsilon_{ijk} B_k$

Las matrices B_i son las siguientes:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} [B_1, B_2] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_3 \end{aligned}$$

$$[B_2, B_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B_1$$

$$[B_3, B_1] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_2$$

Juntando estas ecuaciones obtenemos la ecuación

$$[B_i, B_j] = \varepsilon_{ijk} B_k \tag{3}$$